# THE OPTIMISATION OF DESIGN WITCH USING OF FEM AND MODAL ANALYSIS

### Kazimierz Stanisław Frączek

Instytut Lotnictwa Al. Krakowska 110/114 02-256 Warszawa tel.048 (022) 846 00 11 wew. 542 e-mail kaz@ilot.edu.pl

### Abstract

This paper contains a theoretical analysis which is used to describe the work of complex body light structures. The mathematical equations of equilibrium with many degrees of freedom can't be directly used to describe the motions of airplanes or helicopters. The method presented in this paper, however, shows mathematically how we can calculate the maximal stresses during the flight of helicopter IS - 2 by reducing the huge number of degrees of freedom into the acceptable one. This method is used for optimisation of helicopter's structure.

The first step was to create a structural model of the whole helicopter's body in order to represent the deformations in function of time. In the second step the natural frequencies of shape of motion were calculated. Afterwards, the theoretical results were compared to empirical research on prototype of the IS - 2 helicopter. The verified data were consequently used to analyse stresses in the helicopter's structure. The maximal stresses were used to obtain the materials fatigue. This paper contains explicit method witch can be used to dynamics analysis of another mechanical design.

# METODA OPTYMALIZACJI KONSTRUKCJI Z WYKORZYSTANIEM MES I SUPERPOZYCJI MODALNEJ

#### Streszczenie

Ten artykuł zawiera analizę teoretyczną zastosowaną do opisu złożonych lekkich konstrukcji. Matematyczne równania równowagi opisane wieloma tysiącami stopni swobody nie mogą być bezpośrednio użyte do opisu ruchów samolotów lub śmigłowców. Metoda prezentowana w tym artykule przedstawia sposób wyznaczania maksymalnych naprężeń podczas lotu śmigłowca IS – 2 dla rozbudowanego modelu oraz sposób redukcji stopni swobody całego układu do wymiarów modalnych w przedziałach możliwych częstości wzbudzeń. Ta metoda została zastosowana do optymalizacji struktury śmigłowca IS – 2. Pierwszym krokiem analizy było zbudowanie strukturalnego modelu do wskazania miejsc maksymalnych naprężeń. Następnie wykonano analizę modalną z wyznaczeniem częstości i postaci drgań własnych. Otrzymane wyniki porównano z wynikami pomiarów tych częstości i postaci z wynikami pomiarów na prototypie. Następnie zastosowana metodę umożliwiającą redukcję z dużej liczby stopni swobody do liczby z zakresu możliwych wzbudzeń drgań. Następnie wyznaczono współczynniki wzmocnień amplitud drgań i ponownie wykorzystując model rozbudowany dodano wartości naprężeń z każdej postaci do wartości średniej wynikającej z ustalonego obciążenia. Na podstawie liczby cykli drgań z określonymi wartościami naprężeń określono graniczną wytrzymałość zmęczeniową. Przedstawione fragmenty obliczeń udokumentowano w sposób graficzny na rysunkach. Prezentowana metoda analizy dynamicznej jest słuszna tylko w małym zakresie obciążeń. Może być również wykorzystywana do analizy dynamicznej innych konstrukcji.

## 1 Wstęp.

Celem analiz dynamicznych śmigłowca jest określenie stopnia bezpieczeństwa podczas eksploatacji sprzętu w różnych warunkach.

Zaburzenia lotu, pochodzące od burzliwej atmosfery, oraz powodowane przez pilota wychylaniem powierzchni sterowych wywołują zmienność sił aerodynamicznych.

W naukowej literaturze opisano wiele przypadków lotu samolotów i śmigłowców jako brył sztywnych.

Występujące siły aerodynamiczne rozłożone na powierzchniach zewnętrznych były opisane funkcjami zależnymi od wektora prędkości względnej między otaczającym powietrzem a przesuwającymi się elementami konstrukcji. Pojawiające się zmienne w czasie odkształcenia modyfikowały pola prędkości i tym samym zmieniały obciążenia zewnętrzne. Opis dynamicznej pracy konstrukcji musi zwierać odpowiedź dotyczącą stabilności lotów oraz okresu eksploatacji. Często się zdarzało, że symulacje obliczeniowe, mimo dużego zaangażowania badaczy i obliczeniowców były rozbieżne w stosunku do pomiarów na rzeczywistym obiekcie. Jednym ze sposobów zwiększenia dokładności modelowania było odwzorowanie odkształceń obiektu i określenie ich wpływu na stan bezpieczeństwa lotu pod względem jego stabilności. Do oceny stabilności lotu i do wyjaśnienia przyczyn powstawania drgań samo-wzbudnych zakładano odkształcalność niektórych elementów samolotu lub śmigłowca. Oprócz problemów ze stabilnością lotu pojawia się również problem opisu stanu wytężenia konstrukcji w wyniku działania dodatkowych sił aerodynamicznych i inercyjnych wynikających z odkształceń obiektu. Zmienność tych odkształceń w czasie rodzi szereg pytań dotyczących bezpieczeństwa, które może ulegać zmianie w trakcie eksploatacji sprzętu.

Ocena stopnia zużycia się elementów, zależna jest między innymi od dokładnego określania wielkości sił obciążających konstrukcję, oraz szybkości ich zmian podczas różnych stanów lotu. Odpowiedź na tak postawione pytanie wymaga innego rodzaju modelowania niż wynikało to z badań stabilności parametrów przebiegu lotu.

### 2 Metoda opisu odkształceń obiektu

Preferowana jest metoda MES, pozwalająca na zastąpienie konstrukcji ciągłej dyskretnym podziałem na skończoną liczbę elementów, którym przypisuje się własności mechaniczne i materiałowe. Do odwzorowania pracy cienkościennych konstrukcji lotniczych wykorzystuje się elementy płytowo-tarczowe oraz belkowe. Przemieszczenia wewnątrz elementu opisywane są iloczynem funkcji kształtu i przemieszczeniami przyległych węzłów elementu.

$$q(x, y, z, t) = \lfloor N_1(x, y, z); ..; N_I(x, y, z) \rfloor \begin{cases} q_{1,w} \\ .. \\ q_{I,w} \end{cases} e^{pt} , \qquad (1)$$

gdzie:  $\lfloor N_1(x, y, z); ...; N_l(x, y, z) \rfloor$  – wektor zawierający funkcje kształtu elementu,

 $\begin{cases} q_{1,w} \\ ... \\ q_{l,w} \end{cases}$  - wektor przemieszczeń w wymienionych punktach od 1 do *l*,

e<sup>pt</sup> – funkcja wykładnicza z liczbą naturalną w podstawie,
 zależna od wykładnika liczby zespolonej i parametru czasu.

Wydłużenia względne mają postać:

$$\left\{ \mathcal{E}_{x}(x,y,z,t) \right\} = \frac{\partial \left\lfloor N_{1}(x,y,z);...;N_{l}(x,y,z) \right\rfloor}{\partial x} \begin{cases} q_{1,w} \\ ... \\ q_{l,w} \end{cases} e^{pt} .$$
<sup>(2)</sup>

Naprężenia przedstawiono w postaci:

$$\{\sigma_x(x,y,z,t)\} = \frac{E}{1-v^2} [D] \{\varepsilon_x(x,y,z,t)\}, \qquad (3)$$

gdzie: [D] - macierz sprężystości,

E – moduł Yung'a,

v – liczba Poissona.

Energię odkształcenia elementu płaskiego przedstawiono w postaci pracy sił wewnętrznych:

$$E_{wew} = \frac{1}{2} \int_{V} \left[ \sigma_x(x, y, z, t); \sigma_y(x, y, z, t); \tau_{xy}(x, y, z, t) \right] \left[ \varepsilon_x; \varepsilon_y; \gamma_{xy} \right] dV , \qquad (4)$$

gdzie:  $\tau_{xy}(x, y, z)$  – naprężenia ścinające w płaszczyźnie x-y,

 $\gamma_{x,y}(x, y, z, t)$  – wydłużenia kątowe w płaszczyźnie x-y,

 $\sigma_x, \sigma_y$  – naprężenia w wymienionych kierunkach,

 $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  – wydłużenia względne w adekwatnych kierunkach,

V-objętość elementu skończonego.

Natomiast energię kinetyczną elementu odkształcalnego przedstawiono w postaci iloczynu prędkości odkształcenia i masy w następującej postaci:

$$q(x,t) = \lfloor N \rfloor \{q_w\} p e^{pt} , \qquad (5)$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \lfloor q_w \rfloor \int_V \{N\} \lfloor N \rfloor \rho dV \{q_w\} p^2 e^{pt} .$$
<sup>(6)</sup>

Suma energii odkształcenia sprężystego i energii kinetycznej oraz energii potencjalnej jest równa pracy sił zewnętrznych działających na odkształcalny obiekt.

W przypadku śmigłowca należy uwzględniać energię kinetyczną elementów wirujących i energię związaną z położeniem mas w polu sił grawitacyjnych. Na obiekt poruszający się w powietrzu z pewnymi prędkościami działać będą siły aerodynamiczne, adekwatne do tych prędkości.

Jeżeli rozpatrujemy zachowanie się obiektu odkształcalnego musimy wyznaczyć te prędkości liniowe sztywnego układu (U V W) i prędkości kątowe (P Q R).

Wypadkowy tensor prędkości układu odkształcalnego jest sumą prędkości sztywnego układu i prędkości odkształcenia tego układu. Równania ruchu obiektu odkształcalnego zostaną zmodyfikowane o siły wynikające ze zmiany tensora prędkości. Najistotniejszymi prędkościami powodującymi zmianę obciążeń zewnętrznych są zmiany prędkości na powierzchniach wytwarzających siłę nośną i wirniku tylnym wytwarzającym moment równoważący moment napędowy. Pracę sił zewnętrznych przykładanych do węzłów można zapisać w postaci:

$$L_{zew.} = \lfloor q_w \rfloor \cdot \{P_z\} . \tag{7}$$

Do wyprowadzenia równań ruchu wykorzystuje się zasadę zachowania energii mechanicznej układu i pracy sił zewnętrznych z równania Lagrange'a.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial q_{w}}\right) - \frac{\partial E_{kin}}{\partial q_{w}} + \frac{\partial E_{wew.}}{\partial q_{w}} - \frac{\partial L_{zew}}{\partial q_{w}} = 0 \quad . \tag{8}$$

W efekcie uzyskano układ równań, w których siły bezwładności równe są sumie sił wewnętrznych i zewnętrznych. Jest to również zgodne z zasadą d'Alamberta.

$$[M] \cdot \begin{Bmatrix} \bullet \\ q_w \end{Bmatrix} + [C] \cdot \begin{Bmatrix} \bullet \\ q_w \end{Bmatrix} + [K] \cdot \lbrace q_w \rbrace = \lbrace P_{zew.} \rbrace .$$
(9)

W wypadku badania własności dynamicznych obiektu założono się brak sił zewnętrznych i jedynie uwzględniono działanie sił wewnętrznych sprężystych i sił oporu ruchu proporcjonalnego do prędkości.

$$[-[M](\omega)^{2} + [M](\gamma \cdot \omega)^{2} + [K]]\{q_{w}\} = 0 , \qquad (10)$$

gdzie:  $\varpi_1,..., \varpi_k$  - są prędkościami kątowymi dla kolejnych postaci drgań własnych,

 $\gamma_{1,...},\gamma_{k}$ - są współczynnikami tłumienia krytycznego dla kolejnych postaci.

Z przyrównania wyznacznika charakterystycznego do zera otrzymuje się równanie wyższego rzędu względem nieznanych prędkości kątowych. W wyniku rozwiązania równania algebraicznego wyższego rzędu otrzymuje się określone wielkości spełniające warunki równowagi.

Posługując się dostępnymi programami można w sposób szybki otrzymać postacie i częstości drgań własnych i w sposób graficzny przedstawić symulację na ekranie komputera. Możliwe jest wyznaczenie poziomu naprężeń adekwatnych do poszczególnych uogólnionych amplitud przemieszczeń węzłowych w każdej postaci drgań. Suma wszystkich postaci drgań jest odpowiedzią układu na zaburzenia od otoczenia zewnętrznego.

Jeśli odpowiedź układu jest sumą wielu przemieszczeń z różnych postaci zależnych od parametru czasu to podstawowe równanie przemieszczeń i prędkości mają postać:

$$q(x, y, z, t) = \lfloor N_1; ...N_n \rfloor A_1; ...A_k \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 e^{i\omega_k t} \\ ... \\ \lambda_k e^{i\omega_k t} \end{array} \right\},$$
(11)

$$\stackrel{\bullet}{q(x, y, z, t)} = \lfloor N_1; ... N_n \rfloor \cdot \lfloor A_1 i \omega_1; ...; A_k i \omega_k \rfloor \begin{cases} \lambda_1 e^{i\omega_1 t} \\ ... \\ \lambda_k e^{i\omega_k t} \end{cases} .$$
(12)

Na podstawie wzorów (11) i (12) wyznaczono energię kinetyczną dla każdego elementu należącego do rozpatrywanego układu. Przy czym istnieje skończona liczba warunków brzegowych wektora odkształceń równa liczbie postaci drgań własnych układu bez wymuszeń.

$$E_{kin.}^{uk.} = \frac{1}{2} \left[ \lambda_{I} e^{i\omega_{I}t}; ...; \lambda_{k} e^{i\omega_{k}t} \left[ \begin{array}{c} A_{I,I} i\omega_{I}; ...; A_{I,n} i\omega_{I} \\ ... \\ A_{k,I} i \cdot \omega_{k}; ...; A_{k,n} i\omega_{k} \end{array} \right] \left[ M_{ukl.} \left[ \begin{array}{c} A_{I,I} i\omega_{I}; ...; A_{I,k} i\omega_{k} \\ ... \\ A_{n,I} i\omega_{I}; ...; A_{n,k} i\omega_{k} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \lambda_{I} e^{i\omega_{I}t} \\ ... \\ \lambda_{k} e^{i\omega_{k}t} \end{array} \right\}.$$
(13)

Powyższa postać umożliwia redukcję rozmiaru macierzy mas układu z nxn do wymiaru zredukowanego – kxk, gdzie : k- liczba postaci drgań układu, n- liczba stopni swobody tego układu.

Energia potencjalna układu jest sumą pracy sił wewnętrznych we wszystkich jego elementach, którą przedstawiono w postaci matematycznej jako iloczyn macierzy:

$$E_{pot}^{ukl.} = \frac{1}{2} \Big[ \lambda_{1} e^{i\omega_{1}t}; ..; \lambda_{k} e^{i\omega_{k}t} \begin{bmatrix} A_{1,1}; ..; A_{1,n} \\ .. \\ A_{k,1}; ..; A_{k,n} \end{bmatrix} \Big[ K_{ukladu} \begin{bmatrix} A_{1,1}; ..; A_{1,k} \\ .. \\ A_{n,1}; ..; A_{n,k} \end{bmatrix} \Big] \begin{bmatrix} \lambda_{1} e^{i\omega_{1}t} \\ .. \\ \lambda_{k} e^{i\omega_{k}t} \end{bmatrix}$$
(14)

Pracę sił zewnętrznych działających na ruchomy odkształcalny obiekt uzależniono od prędkości względnej ruchomego obiektu względem nieruchomych mas powietrza osobno dla każdej postaci drgań.

$$\begin{cases}
P_{z1}(U,V,W,P,Q,R,q_{1},..,q_{k}) \\
... \\
P_{zi}(U,V,W,P,Q,R,q_{1},..,q_{k}) \\
... \\
P_{zn}(U,V,W,P,Q,R,q_{1},..,q_{k})
\end{cases}$$
(15)

Całkowita praca sił zewnętrznych jest iloczynem sumy wszystkich sił przyłożonych do węzłów konstrukcji i sumy przemieszczeń we wszystkich postaciach drgań układu, którą można przedstawić w sposób następujący:

$$\left\lfloor \lambda_{1} \cdot e^{i\omega_{1}t}; ...; \lambda_{k} \cdot e^{i\omega_{k}t} \right\rfloor \cdot \begin{bmatrix} A_{1,1}; ...; A_{1,n} \\ ... \\ A_{k,1}; ...; A_{k,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{z,1}; \frac{\partial P_{z,1}}{\partial U}; ...; \frac{\partial P_{z,1}}{\partial q_{k}} \\ P_{z,n}; \frac{\partial P_{z,n}}{\partial U}; ...; \frac{\partial P_{z,n}}{\partial q_{k}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ dU \\ ... \\ dq_{k} \end{bmatrix}$$
(16)

Powyższa zależność umożliwia zredukowanie macierzy obciążenia zewnętrznego z wymiaru [nxl] na wymiar [kxl] przez wymnożenie dwóch przedostatnich macierzy i przedstawienie w następującej postaci:

$$\left[ \lambda_{1} \cdot e^{i\omega_{1}t}; ...; \lambda_{k} \cdot e^{i\omega_{k}t} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^{i=n} A_{1,i} \cdot P_{z,i}; ...; \sum_{i=1}^{i=n} A_{1,i} \cdot \frac{\partial P_{z,1}}{\partial q_{k}} \\ ... \\ \sum_{i=1}^{i=n} A_{k,i} \cdot P_{z,i}; ...; \sum_{i=1}^{i=n} A_{k,i} \cdot \frac{\partial P_{z,n}}{\partial q_{k}} \\ ... \\ d q_{k} \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ dU \\ ... \\ d q_{k} \end{array} \right\} .$$
(17)

Na podstawie bilansu energetycznego badanego układu, w którym występują energia kinetyczna opisująca ruch periodycznie zmienny i energia kinetyczna tracona w skutek tarcia

proporcjonalnego do prędkości, oraz energia potencjalna odkształcenia sprężystego przedstawione zostały w zapisie macierzowym, w którym niewiadomymi wielkościami są współczynniki wzmocnień amplitudy drgań oznaczonych symbolami:  $\lfloor \lambda_1 e^{i\omega_k t} \rfloor$ .

Wektor ten występuje po lewej stronie równania bilansu energetycznego dwukrotnie. Natomiast w prawych stronach przedstawiających pracę sił zewnętrznych tylko raz. Upraszczając równanie bilansu energetycznego o wspomniany wektor uzyskuje się równanie liniowe względem współczynników wzmocnień. Po rozwiązaniu układu równań liniowych względem wektora wzmocnień amplitud otrzymano rzeczywistą postać przemieszczeń dla każdej postaci drgań. Pozwala to na superpozycję rzeczywistych przemieszczeń każdego węzła i relatywnie do odkształceń uzyskanie rzeczywistych naprężeń dla rozbudowanego modelu struktury śmigłowca.

$$\frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix}A_{1,1}i\omega_{1};..;A_{1,n}i\omega_{1}\\..\\A_{k,1}i\omega_{k};..;A_{k,n}i\omega_{k}\end{bmatrix}\left[M_{ukl},\begin{bmatrix}A_{1,1}i\omega_{1};..;A_{1,k}i\omega_{1}\\..\\A_{n,1}i\omega_{k};..;A_{n,k}i\omega_{k}\end{bmatrix}\right] + \left[\begin{bmatrix}A_{1,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{1,k}\gamma_{k}\omega_{k}\\..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}i\omega_{k}\end{bmatrix}\right] + \left[\begin{bmatrix}A_{1,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\\..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\end{bmatrix}\right] + \left[\begin{bmatrix}A_{1,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\\..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\end{bmatrix}\right] + \left[\begin{bmatrix}A_{1,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\\..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\end{bmatrix}\right] + \left[\begin{bmatrix}A_{1,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\\..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\right] + \left[\begin{bmatrix}A_{1,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\\..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\right]\right] + \left[\begin{bmatrix}A_{1,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\\..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\right] + \left[\begin{bmatrix}A_{1,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\\..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\right]\right] + \left[\begin{bmatrix}A_{1,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\\..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\right] + \left[\begin{bmatrix}A_{1,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\\..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\right]\right] + \left[\begin{bmatrix}A_{1,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\\..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\right] + \left[\begin{bmatrix}A_{1,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\\..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\right]\right] + \left[\begin{bmatrix}A_{1,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\\..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\right] + \left[\begin{bmatrix}A_{1,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\\..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\right] + \left[\begin{bmatrix}A_{1,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\\..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\right] + \left[\begin{bmatrix}A_{1,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\\..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\right] + \left[\begin{bmatrix}A_{1,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\right] + \left[\begin{bmatrix}A_{1,1}\gamma_{1}\omega_{1},..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\right] + \left[\begin{bmatrix}A_{1,1}\gamma_{1}\omega_{1},..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1};..;A_{n,k}\gamma_{k}\omega_{k}\right] + \left[\begin{bmatrix}A_{1,1}\gamma_{1}\omega_{1},..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1},..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1},..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1},..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1},..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1},..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1},..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1},..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1},..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1},..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1}\omega_{1},..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1},..\\A_{n,1}\gamma_{1}\omega_{1}\omega_{1},..\\A_{n,1$$

Równanie (18) jest również konstytutywne do opisywania zjawisk flatterowych.

Zniszczenie każdej konstrukcji wynika z przekroczenia naprężeń krytycznych w strukturze obiektu. W przypadku obciążeń zmiennych o dużej liczbie cykli, zniszczenie materiału występuje przy niższym poziomie naprężeń niż dla klasycznej próby jednorazowego rozciągania.

Występuje pewna zależność ujmująca poziom naprężeń z liczbą cykli ich zmian w czasie.

$$\delta^{m} N_{cz} = \text{const} , \qquad (19)$$

gdzie: 6 - jest naprężeniem zmiennym,

m - współczynnik zależny od rodzaju materiału,

N<sub>cz</sub> - jest liczbą cykli zmian.

Zależność (19) jest własnością charakterystyczną dla określonego materiału. Zależność powyższą przedstawiają w sposób graficzny krzywe Wohlära. Wartość napreżeń zmienia sie od wartości minimalnej do maksymalnej.

$$\mathbf{\delta} = \mathbf{\delta}_{\text{sred}} + \mathbf{\delta}_{\text{ampl}} \,. \tag{20}$$

Zależność (20) najczęściej opisywana jest przez krzywą Smitha.

O efekcie końcowym określającym stan bezpieczeństwa decydujące znaczenie mają siły wewnętrzne. Stan wytężenia materiału określany jako średni jest ustalany dla ustalonych parametrów lotu bez przeciążeń. Dla śmigłowca jedno-wirnikowego z siłą nośną na wale głównym oznacza stałe zginanie kadłuba w dwu płaszczyznach: pionowej i bocznej. Siła równoważąca

reakcję silnika i przykładana w osi piasty śmigła ogonowego jest częściowo zastępowana w locie do przodu przez siły reakcji na stateczniku pionowym. Tak więc stan ustalony w śmigłowcu jest w pewnym sensie tylko umowny.

Raczej jest to wartość średnia wyliczana z równań równowagi statycznej. Niesymetryczne rozłożenie mas jest wpisane jakby z definicji śmigłowca. Dlatego analiza zmęczeniowa jest elementem wymiarującym konstrukcję śmigłowców. Sam wirnik z łopatami zamocowanymi do wału za pośrednictwem przegubowej piasty był analizowany jako osobne zadanie badawcze.



*Rys. 1. Model strukturalny śmigłowca* IS - 2 *do analizy wytrzymałościowej i modalnej Fig. 1. The structural model of the helicopter* IS - 2 *for the strength and modal analysis* 



- Rys. 2. Postać dwu-węzłowego zginania kadłuba, gdzie sumują się naprężenia od obciążeń w locie z obciążeniami dynamicznymi z częstością zbliżoną do maksymalnej podczas startu śmigłowca
- Fig. 2. Character of the two-junction of bend of the fuselage, where add up themselves the stresses from loads on the fly with dynamic loads with the nearing frequency for maximum during the start of the helicopter



*Rys. 3. Zginanie boczne kadłuba połączone ze zginaniem goleni podwozia Fig. 3. The side-inflexion fuselage joint with bend of the shin of the chassis* 



*Rys. 4. Typowe drgania kadłuba śmigłowca połączone z drganiami podwozia i zespołem zawieszenia silnika Fig. 4. Typical oscillates fuselage of the helicopter joint with oscillates landing gear and set of the engine suspension* 



- Rys. 5. Mapa naprężeń zredukowanych w elementach przegubowej piasty śmigłowca IS –2 dla ekstremalnego obciążenia otrzymanego z symulacji lądowania w auto-rotacji
- Fig. 5. The map of reduced strains in elements jointed hub of the IS -2 helicopter for the extreme loads received from the simulation of the landing in the autorotation

## 4 Wnioski

Modelowanie strukturalne umożliwiło odwzorowanie wytrzymałościowej pracy całej struktury. Otrzymany obraz wytężonej pracy od obciążeń stacjonarnych uzupełniono o dodatkowe naprężenia wynikające z dynamicznych odkształceń.

Przedstawiona analityczna postać modelu pozwoliła na zastosowanie redukcji z bardzo dużej liczby stopni swobody do adekwatnej liczby postaci drgań z przewidywalnych częstości wzbudzeń.

Każda postać drgań własnych charakteryzuje się większą odkształcalnością wybranych elementów. Zmieniając sztywności lub masy wybranych elementów układu bezpośrednio wpływamy w sposób przewidywalny na późniejsze drgania konstrukcji.

Występuje określona liczba częstości i adekwatnych postaci dowodzi możliwości redukcji liczby elementów strukturalnego modelu, który pozwala na analityczne opisanie dynamicznej pracy i wyznaczanie wartości współczynników wzmocnień amplitud drgań własnych.

Algebraiczne sumowanie przemieszczeń połączone z liczeniem liczby cykli zmian jest odwzorowaniem rzeczywistych obciążeń i analityczne wyznaczenie krytycznego czasu eksploatacji struktury w sposób symulacyjny.

Przedstawiona metoda jest zgodna z badaniami na prototypie przy stosunkowo małych wzbudzeniach. W przypadku wystąpienia dużych odkształceń ulega zmianie za równo postać jak i częstotliwość drgań własnych, oraz algorytm tworzenia macierzy sztywności, bezwładności, oraz tłumień.

## Literatura:

- [1]. Awrejcewicz, J., Krysko, W., Drgania układów ciągłych, WNT 2000.
- [2]. Bubień, W., Monitorowanie lotów NOE śmigłowca PZL Sokół w aspekcie żywotności zmęczeniowej jego zespołów, Prace Instytutu Lotnictwa 165-166, 2001.
- [3]. Dżygadło, Z., Kowaleczko, G., *Regular and chaotic vibrations of a helicopter-autopilot system*, Research Bulletin nr 6, 1997.
- [4]. Dul, F., *Time domain areoelastic analysis of flying vehicles and civil structures*, Research Bulletin nr 6, 1997.
- [5]. Frączek, K., Ocena własności dynamicznych konstrukcji śmigłowca IS -2 na podstawie analizy modalnej, Materiały konferencyjne IV Krajowej Konferencji Wiropłatowej- 2001.
- [6]. Olejnik, A., Kachel, S., Zastosowanie cyfrowych modeli statków powietrznych do analizy obciążeń, zagadnień wytrzymałościowych drgań samolotów złożonym układzie aerodynamicznym i konstrukcyjnym, Mechanika w Lotnictwie ML-X 2002.
- [7]. Szamański, K., *Teoria i badania śmigłowców w ujęciu symulacyjnym*, Biblioteka Naukowa Instytutu Lotnictwa, 1997.